

## Aufgabe 1: Vermischte Aufgaben (18 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen. Beachten Sie bitte, dass in der Regel stichpunktartige Antworten ausreichen. Wenn möglich, geben Sie auch eine Begründung Ihrer Antwort bzw. den Rechenweg an.

### Allgemeine Fragen

- a) Was ist eine Fensterfunktion? (1 Punkt)
- b) Was muss für die mittlere Frequenz eines Fensters gelten, damit sie sich bei Skalierung mit einem Skalierungsfaktor  $a > 0$  verändert? (1 Punkt)
- c) Geben Sie die untere Grenze für das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt an. Existiert ein Signal, welches diese Grenze erreicht? (1 Punkt)

### Energiesignale

Gegeben ist das Signal

$$x(t) = c \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \cdot r_T(t), \quad c > 0.$$

- d) Zeigen Sie, dass es sich dabei um ein Energiesignal handelt. (3 Punkte)
- e) Bestimmen Sie den Faktor  $c$  so, dass die Signalenergie auf  $E_x = 1$  normiert wird. (2 Punkte)

### Basis und Frame

- f) Wie können die Koeffizienten zur Signaldarstellung bei einem Frame bestimmt werden? (2 Punkte)

Gegeben ist ein Vektorensystem in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- g) Bestimmen Sie die Gram'sche Matrix des Vektorensystems. (2 Punkte)
- h) Worum handelt es sich bei dem Vektorensystem? (Begründung) (1 Punkt)
- i) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Signaldarstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 a_i \varphi_i$$

für den Vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ . (2 Punkte)

Gegeben ist nun ein Vektorensystem in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\varphi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- j) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix des Vektorensystems. (2 Punkte)
- k) Worum handelt es sich bei dem Vektorensystem? (Begründung) (1 Punkt)

## Lösung

### Allgemeine Fragen

- a) Ein reelles, symmetrisches nicht-negatives Energiesignal, dessen Signalenergie überwiegend im Bereich der mittleren Zeit und der mittleren Frequenz lokalisiert ist. (1 Punkt)
- b) Es muss gelten  $f_x \neq 0$ , da bei Skalierung  $f_{x,a} = \frac{1}{a} f_x$ . (1 Punkt)
- c) Minimales Zeitdauer-Bandbreite Produkt:

$$\Delta_t \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi},$$

wird von Gaußimpuls erreicht.

(1 Punkt)

### Energiesignale

- d) Die Energie des Signals wird berechnet:

$$\begin{aligned} E_x &= \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= c^2 \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Mit

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} E_x &= c^2 \left[ \frac{1}{2}t - \frac{T}{8\pi} \sin\left(4\pi \frac{t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= c^2 \left( \frac{T}{4} - \frac{T}{8\pi} \sin(2\pi) + \frac{T}{4} + \frac{T}{8\pi} \sin(-2\pi) \right) \\ &= c^2 \cdot \frac{T}{2} < \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Das Signal besitzt eine endliche Signalenergie und ist daher ein Energiesignal. (3 Punkte)

- e) Die Signalenergie soll auf eins normiert werden:

$$E_x = c^2 \cdot \frac{T}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{T}}$$

(2 Punkte)

### Basis und Frame

- f) Durch Projektion des Signals auf die Framefunktionen (1). Dabei muss die Koeffizientenenergie innerhalb der Framegrenzen bleiben (1). (2 Punkte)

g) Gram'sche Matrix:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2 Punkte)

h) Es handelt sich um eine Basis, da die Gram'sche Matrix regulär ist

(1 Punkt)

i) Die Koeffizienten werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \varphi_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 Punkte)

j)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

k) Es handelt sich um einen (überbestimmten) Frame

$$\det(\mathbf{G}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gram'sche Matrix ist singulär.

(1 Punkt)

# MUSTERLÖSUNG

## Aufgabe 2: Kurzzeit-Fourier-Transformation (10 Punkte)

### Kurzzeit-Fourier-Transformation

- a) Berechnen Sie die Kurzzeit-Fourier-Transformierte des Signals  $x(t - t_0)$  in Abhängigkeit der Kurzzeit-Fourier-Transformation des Signals  $x(t)$ . (2 Punkte)
- b) Zeichnen Sie die Kurzzeit-Fourier-Transformierten der folgenden Signale qualitativ in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter ein:

- $x_1(t) = e^{j2\pi \frac{F}{2} t}$
- $x_2(t) = e^{-\alpha(t-\frac{T}{4})^2} e^{j2\pi \frac{F}{4} t} + e^{-\alpha(t-\frac{3T}{4})^2} e^{j2\pi \frac{F}{2} t}$
- $x_3(t) = \sin\left(2\pi\left(\frac{F}{4} + \frac{F}{4T} \cdot t\right) \cdot t\right)$

Kennzeichnen Sie hohe Signalenergien mit dunkler Farbe. Benutzen Sie bitte keinen Bleistift! (4 Punkte)

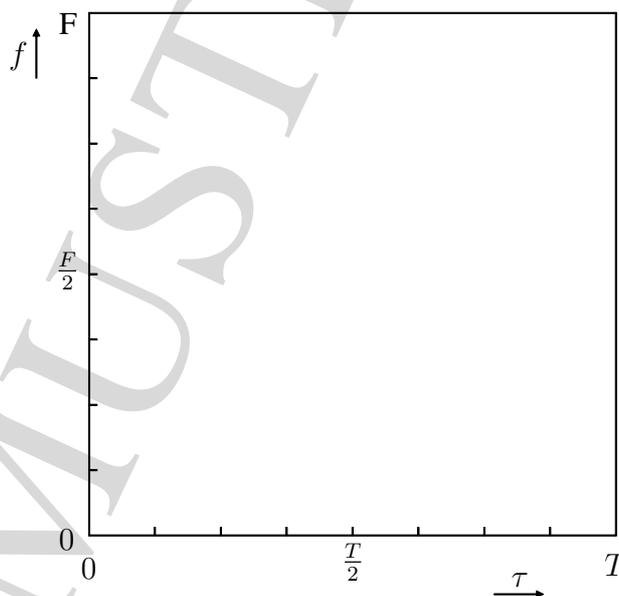


Bild 1:  $S_{x_1}^\gamma(\tau, f)$

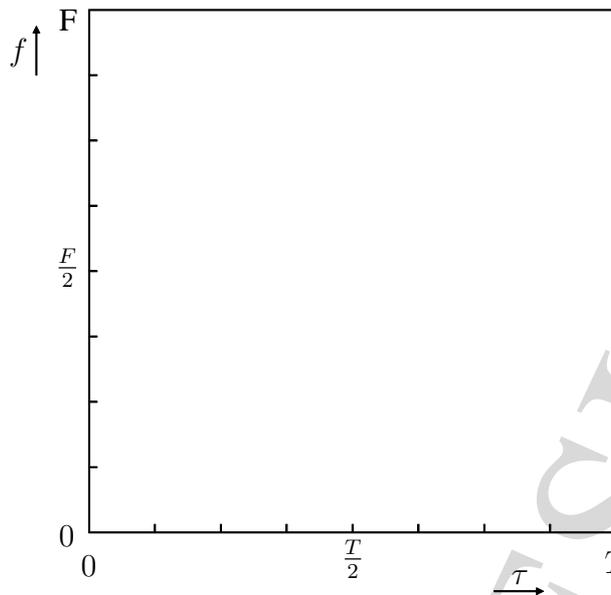


Bild 2:  $S_{x_2}^\gamma(\tau, f)$

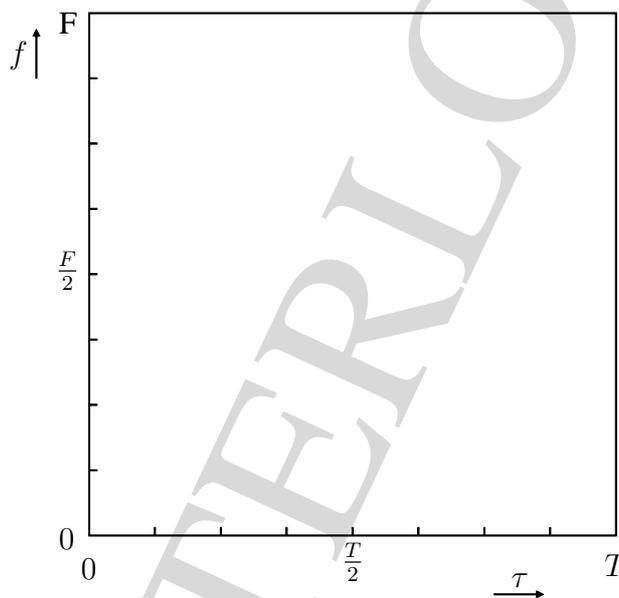


Bild 3:  $S_{x_3}^\gamma(\tau, f)$

Gegeben sei das Signal

$$x(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t - t_1).$$

Anhand des Analysefensters

$$\gamma(t) = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{1/4} \cdot \exp(-\beta t^2)$$

soll das gegebene Signal  $x(t)$  mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation analysiert werden.

- c) Berechnen Sie die Kurzzeit-Fourier-Transformierte  $F_x^\gamma(\tau, f)$  von  $x(t)$  unter Verwendung des Analysefensters  $\gamma(t)$ . (3 Punkte)
- d) Skizzieren Sie das Spektrogramm  $|F_x^\gamma(\tau, f)|^2$  in der Zeit-Frequenz-Ebene. (1 Punkt)

## Lösung

### Kurzzeit-Fourier-Transformation

a)

$$\begin{aligned} F_{x_0}^\gamma(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \gamma^*(t' - (\tau - t_0)) e^{-j2\pi f (t' + t_0)} dt' \\ &= F_x^\gamma(\tau - t_0, f) e^{-j2\pi f t_0}. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

b) Zu  $x_3$ : Hierbei handelt es sich um ein Chirp-Signal mit der Phase

$$\varphi(t) = 2\pi \left( \frac{F}{4} + \frac{F}{4T} t \right) \cdot t = 2\pi \frac{F}{4} t + 2\pi \frac{F}{4T} t^2.$$

Die Momentanfrequenz berechnet sich zu

$$f_{x_3}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}(t) = \frac{F}{4} + \frac{F}{2T} \cdot t.$$

Die Momentanfrequenz steigt also linear mit der Zeit an, mit der Steigung  $\frac{F}{2T}$ . Damit ergibt sich für die Momentanfrequenzen zu den Zeitpunkten 0 und  $T$

$$\begin{aligned} f_{x_3}(0) &= \frac{F}{4}, \\ f_{x_3}(T) &= \frac{F}{4} + \frac{F}{2T} \cdot T = \frac{3F}{4}. \end{aligned}$$

Diagramme:

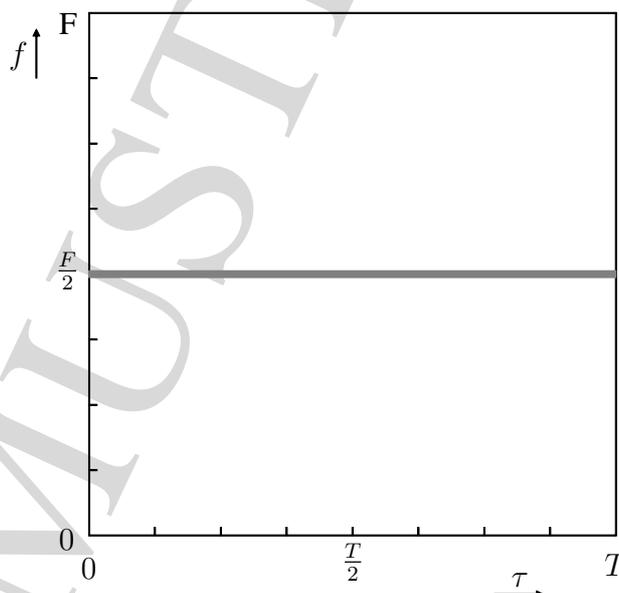


Bild 4:  $S_{x_1}^\gamma(\tau, f)$

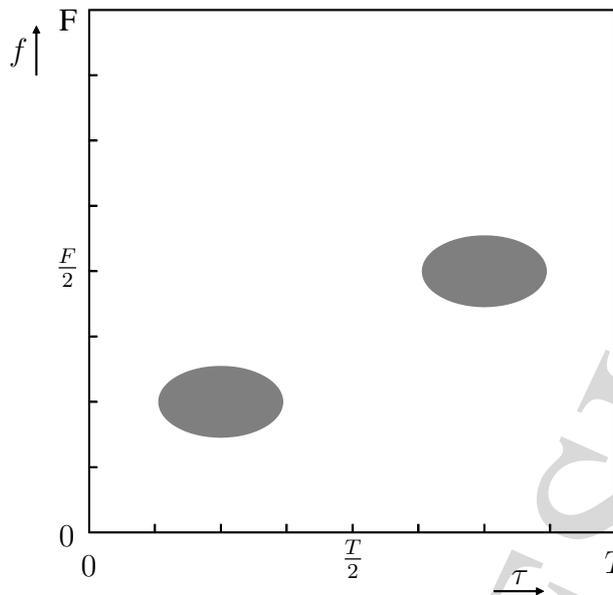


Bild 5:  $S_{x_2}^\gamma(\tau, f)$

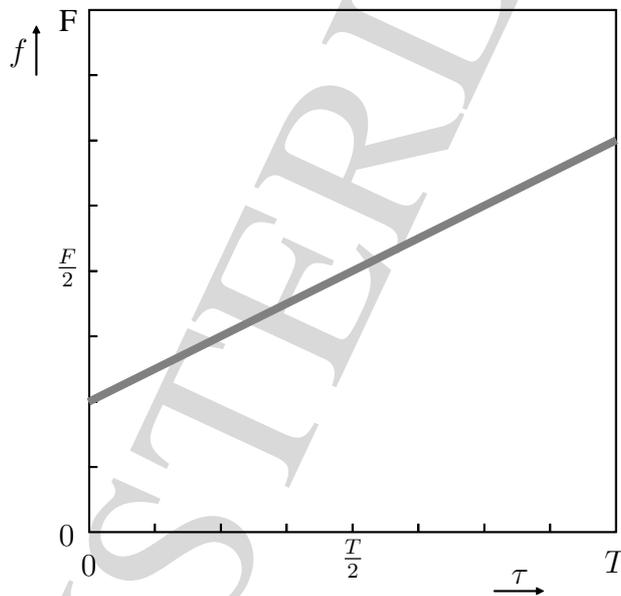


Bild 6:  $S_{x_3}^\gamma(\tau, f)$

c) Die Definition der Kurzzeit-Fourier-Transformierten lautet

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \gamma^*(t - \tau) \exp(-j 2\pi f t) dt. \quad (1)$$

Durch Einsetzen und mit  $c_1 = \left(\frac{2\beta}{\pi}\right)^{1/4}$  erhält man

$$\begin{aligned}
 F_x^\gamma(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t - t_0) + \delta(t - t_1)) \cdot c_1 \cdot \exp(-\beta(t - \tau)^2) \cdot \exp(-j2\pi ft) dt \\
 &= c_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot \exp(-\beta(t - \tau)^2) \cdot \exp(-j2\pi(f)t) \\
 &\quad + \delta(t - t_1) \cdot \exp(-\beta(t - \tau)^2) \cdot \exp(-j2\pi(f)t) dt. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$F_x^\gamma(\tau, f) = c_1 \cdot (\exp(-\beta(t_0 - \tau)^2) \cdot \exp(-j2\pi ft_0) + \exp(-\beta(t_1 - \tau)^2) \cdot \exp(-j2\pi ft_1)) . \quad (1)$$

*(3 Punkte)*

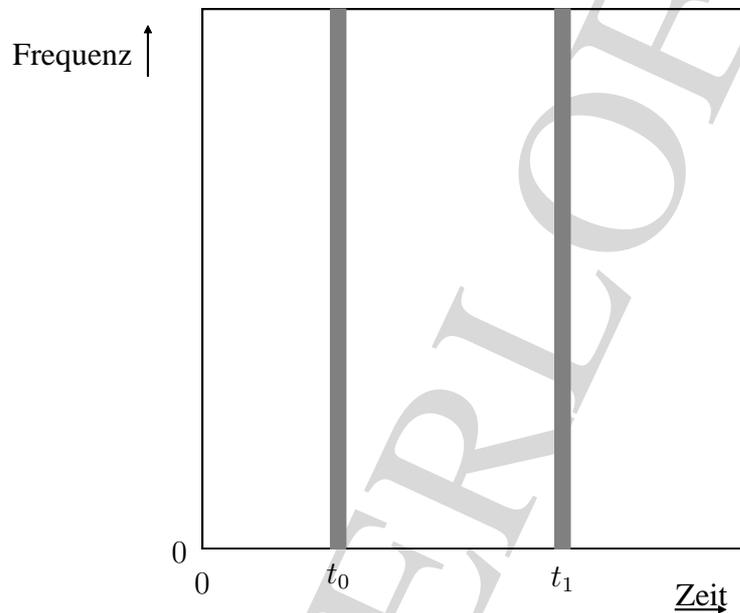


Bild 7: Spektrogramm des Signals  $x(t)$

d)

*(1 Punkt)*

# MUSTERLÖSUNG

### Aufgabe 3: Wavelet-Transformation (13 Punkte)

#### Kontinuierliche Wavelet-Transformation

- a) Wie kann die Wavelet-Transformierte  $W_x^\psi(a, b)$  eines Signals  $x(t)$  aus dessen Spektrum  $X(f)$  berechnet werden? (Berechnungsvorschrift angeben) (1 Punkt)
- b) Wann gilt bei der Wavelet-Transformation Energieerhaltung? (1 Punkt)

#### Dyadische Wavelet-Transformation

Gegeben ist ein Signal  $y(n)$ , das mit einer Abtastfrequenz  $f_A = \frac{1}{t_A}$  abgetastet wurde. Im Beobachtungsintervall  $Nt_A$  liegen  $N = 8$  Abtastwerte vor.

- c) Zeichnen Sie in das vorgefertigte Diagramm in Bild 8 das Abtastraster der Zeit-Frequenz-Ebene bei einer 8-Punkte Fourier-Transformation ein. Welche Frequenzauflösung  $\Delta f$  ergibt sich dabei? (2 Punkte)
- d) Zeichnen Sie in Bild 9 das Abtastraster der Zeit-Frequenz-Ebene bei einer diskreten Kurzzeit-Fourier-Transformation mit der diskreten Zeitverschiebung  $T = t_A$  und der diskreten Frequenzverschiebung  $F = f_A/4$ . (2 Punkte)
- e) Zeichnen Sie in Bild 10 die Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei einer dreistufigen diskreten Wavelet-Transformation (Multiraten-Filterbank) ein. Die gestrichelten Linien im Diagramm markieren die Einteilung durch die Skalierungsfunktionen des Raumes  $V_0$ . (2 Punkte)

Markieren Sie am Rand des Diagramms die Frequenzbereiche, die durch die Waveleträume  $W_1, W_2, W_3$  und  $V_3$  abgedeckt werden. (2 Punkte)

- f) Nun soll das Signal mit Hilfe einer dreistufigen Wavelet-Packet-Transformation analysiert werden. Die gewählte Filterbank ist in Abbildung 11 abgebildet. Zeichnen Sie in Bild 12 die resultierende Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene ein. (3 Punkte)

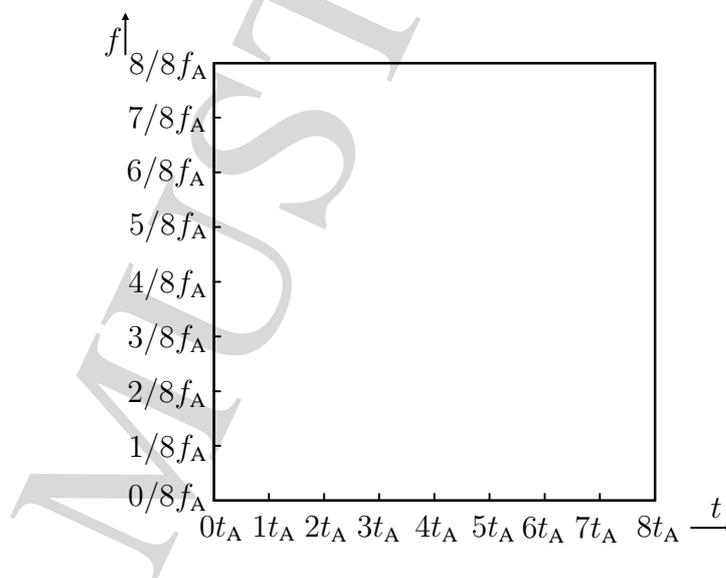


Bild 8: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei diskreter 8-Punkte Fourier-Transformation

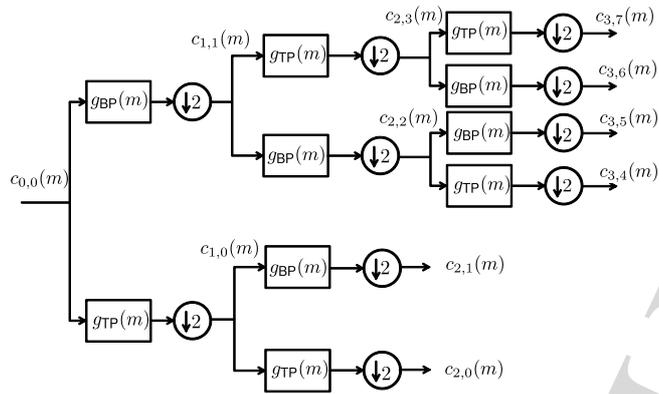


Bild 11: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei Wavelet-Packet-Transformation

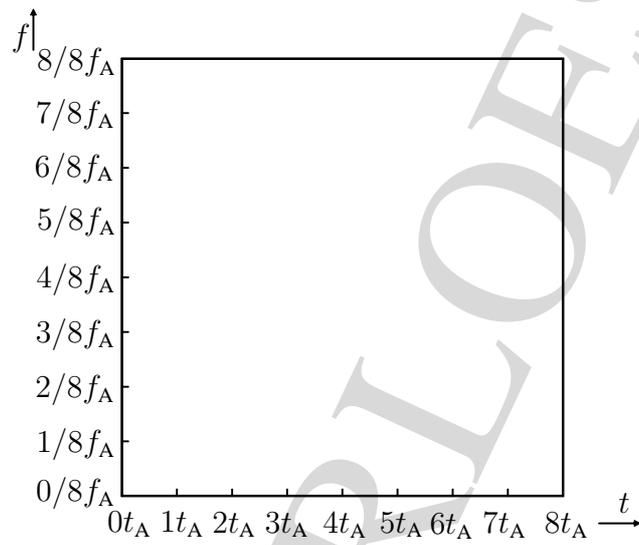


Bild 9: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei diskreter Kurzzeit Fourier-Transformation mit  $T = t_A$  und  $F = f_A/4$ .

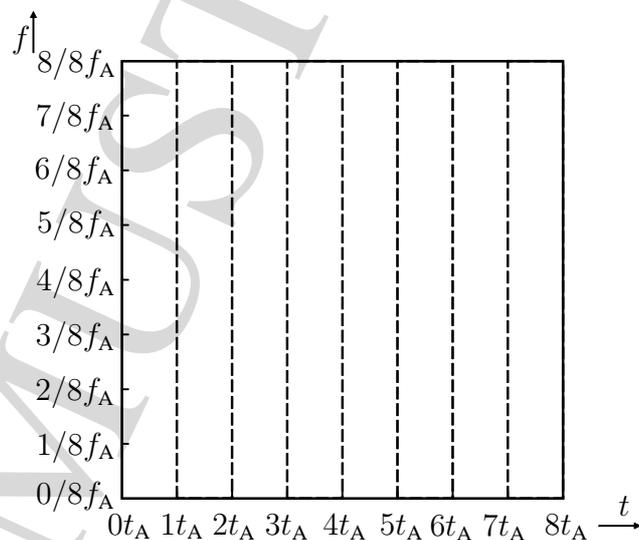


Bild 10: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei dreistufiger Multiraten-Filterbank.

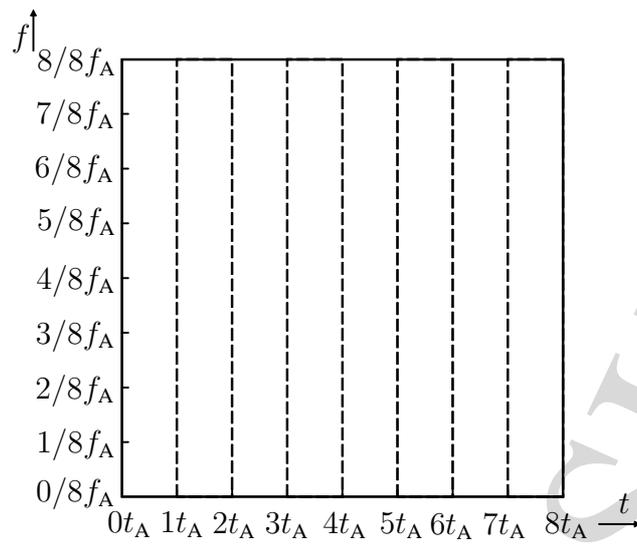


Bild 12: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei Wavelet-Packet-Transformation

## Lösung

### Kontinuierliche Wavelet-Transformation

- a) Berechnung der Wavelet-Transformierten über das Spektrum (andere Antworten möglich):

$$W_x^\psi(a, b) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ X(f) \sqrt{|a|} \Psi^*(af) \right\}$$

(1 Punkt)

- b) Die Energieerhaltung gilt, wenn für das Wavelet  $\psi(t)$  die Zulässigkeitsbedingung

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(af)|^2}{|a|} da < \infty$$

erfüllt ist.

(1 Punkt)

### Dyadische Wavelet-Transformation

- c) Frequenzauflösung:  $\Delta f = f_A/N = f_A/8$ .

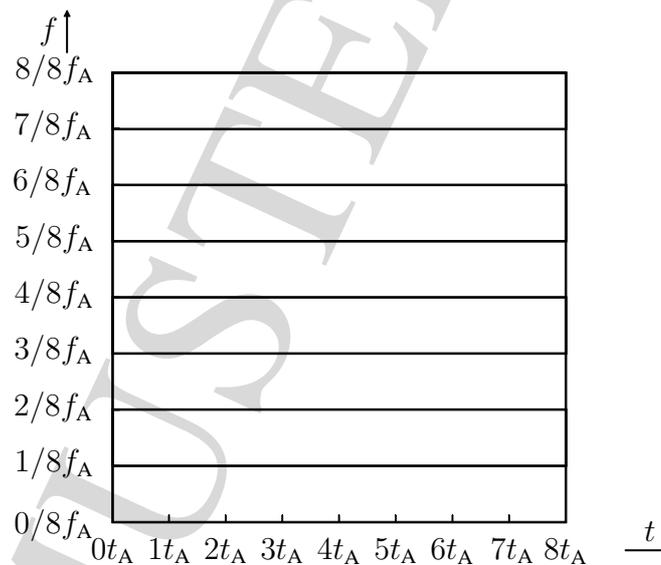


Bild 13: Lösung: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei diskreter 8-Punkte Fourier-Transformation

(2 Punkte)

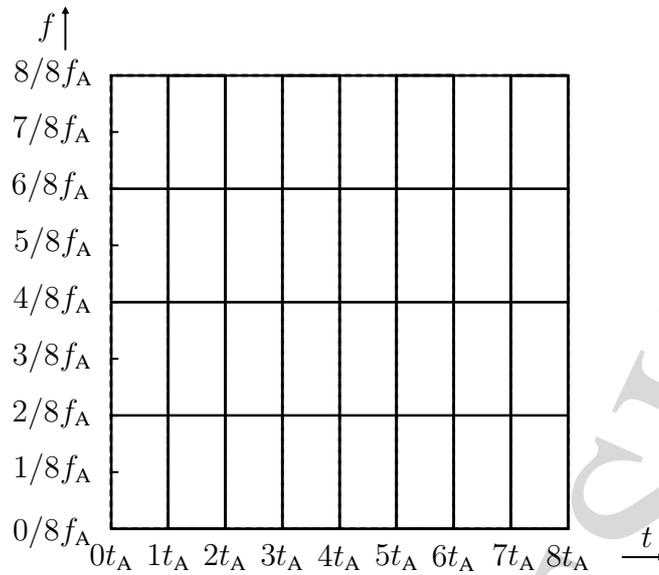


Bild 14: Lösung: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei diskreter Kurzzeit Fourier-Transformation mit  $T = t_A$  und  $F = f_A/4$ .

d)

(2 Punkte)

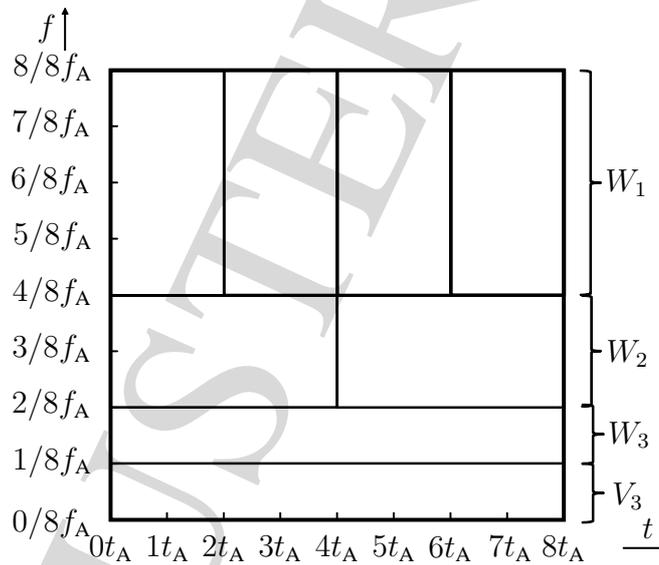


Bild 15: Lösung: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei dreistufiger Multiraten-Filterbank.

e)

(4 Punkte)

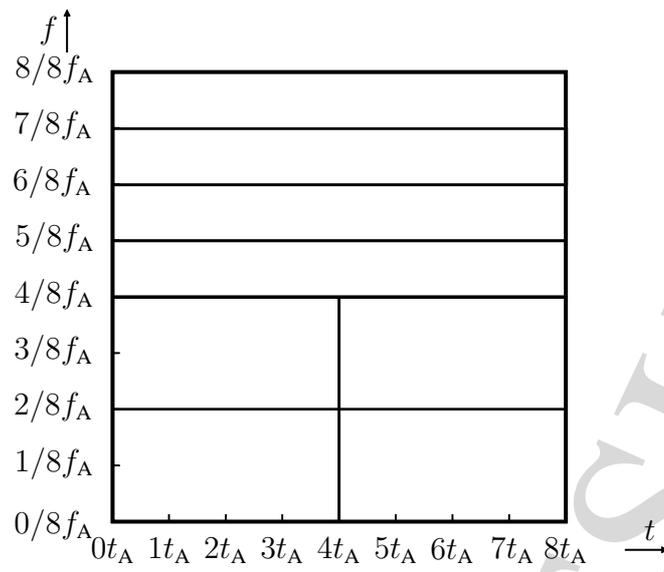


Bild 16: Lösung: Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene bei Wavelet-Packet-Transformation.

f)

(3 Punkte)

#### Aufgabe 4: Wigner-Ville-Verteilung (14 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen. Beachten Sie bitte, dass in der Regel stichpunktartige Antworten ausreichen. Wenn möglich, geben Sie auch eine Begründung Ihrer Antwort bzw. den Rechenweg an.

- a) Wodurch sind die Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung begründet? (1 Punkt)
- b) Nennen Sie zwei Möglichkeiten, wie Kreuzterme unterdrückt werden können. Was passiert dabei? (2 Punkte)
- c) Was ergibt sich aus der Cohen-Klasse, wenn als Kernfunktion  $\Pi(t, f)$  die Wigner-Ville-Verteilung  $W_{\gamma\gamma}(-t, -f)$  einer Fensterfunktion verwendet wird? (1 Punkt)

Im Folgenden soll das Signal  $x(t) = e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t}$  mit Hilfe der Wigner-Ville-Verteilung analysiert werden.

- d) Bestimmen Sie den Wignerkernel  $w_{xx}(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2})$ . (4 Punkte)
- e) Bestimmen Sie die Wigner-Ville-Verteilung  $W_{xx}(t, f)$  des Signals. Kennzeichnen Sie die Auto- und Kreuzterme. (4 Punkte)
- f) Skizzieren Sie  $W_{xx}(t, f)$  im dafür vorgesehenen Diagramm. Kennzeichnen Sie die Auto- und Kreuzterme. (2 Punkte)

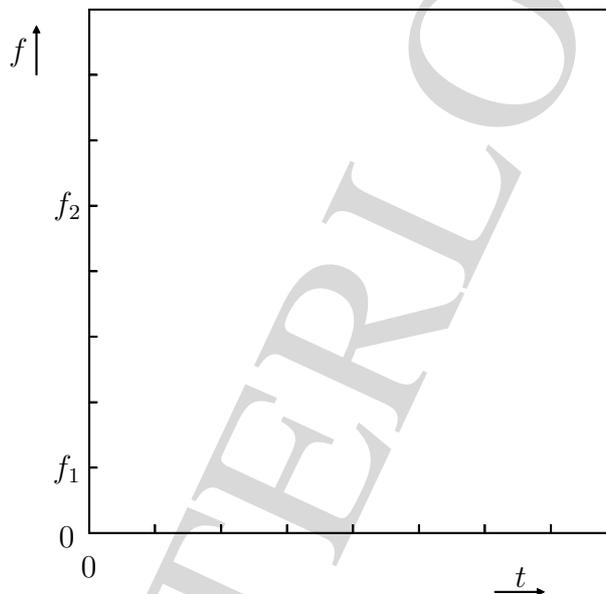


Bild 17:  $W_{xx}(t, f)$  in der Zeit-Frequenz-Ebene

## Lösung

- a) Durch die Nichtlinearität der Transformation (Quadrierung des Signals). (1 Punkt)
- b) z.B. Transformation des analytischen Signals (keine KT zwischen positiven und negativen Frequenzen), Cohen-Klasse (Glätten der KT mit einem Tiefpass), Reassignment (Neuanordnung der Punkte). (2 Punkte)
- c) In diesem Fall entspricht die Cohen-Klasse einem Spektrogramm

$$C_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t', f') W_{\gamma, \gamma}(t' - t, f' - f) dt', df' = S_x^{\gamma}(t, f).$$

(1 Punkt)

- d) Wignerkernel:

$$w_{xx}(t, \tau) = \left( e^{j2\pi f_1(t + \frac{\tau}{2})} + e^{j2\pi f_2(t + \frac{\tau}{2})} \right) \cdot \left( e^{-j2\pi f_1(t - \frac{\tau}{2})} + e^{-j2\pi f_2(t - \frac{\tau}{2})} \right) \quad (1)$$

$$= e^{j2\pi f_1 \tau} + e^{j2\pi(f_1 - f_2)t + j2\pi(f_1 + f_2)\frac{\tau}{2}} + e^{-j2\pi(f_1 - f_2)t + j2\pi(f_1 + f_2)\frac{\tau}{2}} + e^{j2\pi f_2 \tau} \quad (1)$$

$$= e^{j2\pi f_1 \tau} + e^{j2\pi(f_1 + f_2)\frac{\tau}{2}} \cdot [e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} + e^{-j2\pi(f_1 - f_2)t}] + e^{j2\pi f_2 \tau} \quad (1)$$

$$= e^{j2\pi f_1 \tau} + 2e^{j2\pi(f_1 + f_2)\frac{\tau}{2}} \cdot \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + e^{j2\pi f_2 \tau} \quad (1)$$

(4 Punkte)

- e) Wigner-Ville-Verteilung:

$$W_{xx}(t, f) = \mathcal{F}_{\tau}(w_{xx}(t, \tau))$$

Korrespondenzen nutzen:

$$e^{j2\pi f_1 \tau} \overset{\tau}{\circlearrowleft} \delta(f - f_1),$$

$$e^{j2\pi f_2 \tau} \overset{\tau}{\circlearrowleft} \delta(f - f_2). \quad (1)$$

Für den dritten Term ergibt sich

$$2e^{j2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} \tau} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) \overset{\tau}{\circlearrowleft} 2\delta\left(f - \frac{f_1 + f_2}{2}\right) \cdot \cos(2\pi(f_1 - f_2)t). \quad (1)$$

Die Wigner-Ville-Verteilung des Signals  $x(t)$  lautet schließlich

$$W_{xx}(t, f) = \underbrace{\delta(f - f_1)}_{\text{Autoterm}} + 2 \cdot \underbrace{\delta\left(f - \frac{f_1 + f_2}{2}\right) \cdot \cos(2\pi(f_1 - f_2)t)}_{\text{Kreuzterm}} + \underbrace{\delta(f - f_2)}_{\text{Autoterm}}. \quad (1)$$

Der Kreuzterm liegt bei der Mittenfrequenz  $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$  zwischen den Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  der Autoterme und oszilliert mit der Differenzfrequenz  $\Delta f = f_1 - f_2$  (orthogonal zu den Autoterme). (1) für korrekte Kennzeichnung der Auto- und Kreuzterme. (4 Punkte)

- f) Skizze: Siehe Bild 18. (2 Punkte)

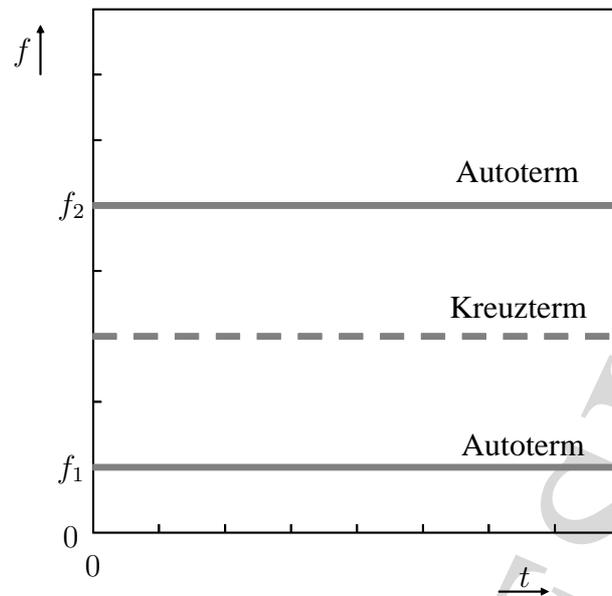


Bild 18:  $W_{xx}(t, f)$  in der Zeit-Frequenz-Ebene

# MUSTERLÖSUNG

## Aufgabe 5: Parameterschätzverfahren (27 Punkte)

### Lineares Signalmodell

Als Temperatursensoren können Pt<sub>100</sub>-Elemente verwendet werden, indem die Temperaturabhängigkeit ihres Widerstandes ausgenutzt wird. Für Temperaturen  $\theta > 100^\circ\text{C}$  lässt sich die Widerstandskennlinie näherungsweise durch ein quadratisches Polynom beschreiben

$$R(\theta) = R_0(1 + a\theta + b\theta^2).$$

Dabei ist  $R_0 = 100 \text{ Ohm}$  der Kaltwiderstand bei  $0^\circ\text{C}$ . Durch  $N$  Messungen der Widerstandswerte  $R(\theta)$  für verschiedene Temperaturen sollen die Parameter  $a$  und  $b$  der Kennlinie mittels eines Least-Squares-Schätzers geschätzt werden. Die Messung wird dabei von mittelwertfreiem Gaußschen weißen Rauschen überlagert

$$y(n) = R(n) + e(n).$$

- a) Stellen Sie das lineare Signalmodell für eine Messung  $y(n)$  auf. (1 Punkt)  
b) Wie viele Messungen werden mindestens benötigt um die Parameter zu schätzen? (1 Punkt)

Aus der gegebenen Messreihe mit  $N = 5$  Messungen sollen die Parameter  $a$  und  $b$  der Kennlinie geschätzt werden.

$n$	$\theta/^\circ\text{C}$	$y/\text{Ohm}$
1	110	142,282
2	115	144,195
3	120	146,035
4	125	147,975
5	130	149,828

- c) Stellen Sie das Signalmodell für die  $N$  Messungen in Vektor-Matrix Notation auf. Kennzeichnen Sie dabei den Messvektor, den Parametervektor und die Beobachtungsmatrix. (1 Punkt)

### Minimum-Varianz-Schätzer

An einem Kondensator  $C$  liegt die Spannung  $U_0$  an. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Kondensator an einen Widerstand  $R$  angeschlossen, so dass er sich zu entladen beginnt. Der zeitliche Verlauf der Spannung über dem Kondensator

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad \alpha = \frac{1}{R \cdot C} > 0$$

wird ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  zeitdiskret gemessen (Abtastzeit  $T$ ). Bei der Messung tritt ein additiv überlagerter Fehler auf, der als Gauß'sches weißes Rauschen angenommen wird. Es sei bekannt, dass sich die Rauschleistung ebenfalls exponentiell ändert:

$$\sigma_e^2(t) = \sigma_0^2 \cdot e^{-\beta t}, \quad \beta > 0$$

Aus  $N$  aufgenommenen Messwerten  $y(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  soll die Anfangsspannung  $U_0$  geschätzt werden. Die Parameter  $R$  und  $C$  werden dabei als bekannt vorausgesetzt.

- d) Stellen Sie ein lineares Signalmodell für  $y$  auf. (2 Punkte)  
e) Berechnen Sie einen Schätzwert für  $U_0$  mithilfe eines Minimum-Varianz-Schätzers. (8 Punkte)  
f) Geben Sie (ohne Rechnung) den Schätzwert bei Verwendung eines Least-Squares-Schätzers an. (2 Punkte)

## Bayes-Schätzung

Die Lebensdauer eines elektrischen Bauelements wird im Folgenden mit Hilfe einer Exponentialverteilung beschrieben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Lebensdauer  $t$  lautet dabei

$$f(t|\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Parameter  $\lambda$  wird als Ausfallrate bezeichnet und ist die Inverse des durchschnittlichen Ausfallzeitpunktes

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}.$$

Aus  $N$  statistisch unabhängigen Messungen  $t_n, n = 1 \dots N$  der Lebensdauern soll die Ausfallrate mit einem Maximum-Likelihood-Schätzer geschätzt werden.

**Hinweis:**

$$E\{t_n\} = \frac{1}{\lambda}$$

- g) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion  $\ln f(t|\lambda)$  für  $N$  Messwerte. (4 Punkte)
- h) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für die Ausfallrate  $\lambda$  aus  $N$  Messungen. (3 Punkte)
- i) Ist der Schätzer erwartungstreu? (2 Punkte)
- j) Welchen Wert müsste die Schätzfehlerkovarianz annehmen, damit der Schätzer effizient ist? (3 Punkte)

## Lösung

a) Lineares Signalmodell:

$$\begin{aligned} y(n) &= R(n) + e(n) \\ &= R_0 + a \cdot R_0 \cdot \theta(n) + b \cdot R_0 \cdot \theta^2(n) + e(n) \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird umgeformt zu

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &:= y(n) - R_0 = a \cdot R_0 \cdot \theta(n) + b \cdot R_0 \cdot \theta^2(n) + e(n) \\ &= c_1 \cdot \theta(n) + c_2 \cdot \theta^2(n) + e(n). \end{aligned}$$

mit  $c_1 = R_0 \cdot a$  und  $c_2 = R_0 \cdot b$ .

(1 Punkt)

b) Da zwei Parameter geschätzt werden sollen, werden mindestens zwei Gleichungen und damit zwei Messwerte benötigt.

(1 Punkt)

c) Signalmodell:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 42,282 \\ 44,195 \\ 46,035 \\ 47,975 \\ 49,828 \end{bmatrix}}_{\text{Messvektor } \tilde{\mathbf{y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 110 & 110^2 \\ 115 & 115^2 \\ 120 & 120^2 \\ 125 & 125^2 \\ 130 & 130^2 \end{bmatrix}}_{\text{Beobachtungsmatrix } \Phi} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\text{Parametervektor } \mathbf{c}} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \\ e(5) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Alternativ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 142,282 \\ 144,195 \\ 146,035 \\ 147,975 \\ 149,828 \end{bmatrix}}_{\text{Messvektor } \mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 110 & 110^2 \\ 1 & 115 & 115^2 \\ 1 & 120 & 120^2 \\ 1 & 125 & 125^2 \\ 1 & 130 & 130^2 \end{bmatrix}}_{\text{Beobachtungsmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} R_0 \\ aR_0 \\ bR_0 \end{bmatrix}}_{\text{Parametervektor}} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \\ e(5) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Anmerkungen:

- Je mehr a-priori Wissen Sie in Ihr Modell aufnehmen, desto genauer wird Ihre Schätzung.
- Setzen Sie in Gleichung 2 das gegebene  $R_0$  der Aufgabenstellung, so sollten Sie für  $a$  und  $b$  den gleichen Wert schätzen wie bei Gleichung 1. Der Rechenweg ist nur bei Gleichung 2 aufgrund der Dimension der Beobachtungsmatrix aufwendiger.
- Sind das Modell sowie die von Ihnen angenommene Wahrscheinlichkeitsdichten der Parameter und Störung hinreichend gut, so sollte die Schätzung von  $R_0$  nach Gleichung 1 genau den gleichen Wert liefern, der schon bekannt ist.

(1 Punkt)

## Minimum-Varianz-Schätzer

d) Messgleichung:

$$y(n) = U_0 \cdot e^{-\alpha n T} + e(n) \quad (1)$$

Signalmodell für  $N$  Messwerte:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha 0 T} \\ \vdots \\ e^{-\alpha(N-1)T} \end{bmatrix} \cdot U_0 + \begin{bmatrix} e(0) \\ \vdots \\ e(N-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

e) Für den MV-Schätzer wird die invertierte Kovarianzmatrix des Fehlervektors benötigt. Da zeitlich aufeinander folgende Fehler unkorreliert sind, gilt:

$$E \{e(n)e(m)\} = \sigma_0^2 \cdot e^{-\beta n T} \cdot \delta(n-m)$$

Für die Kovarianzmatrix folgt:

$$\mathbf{C}_{ee} = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} e^{-\beta 0 T} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{-\beta(N-1)T} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}_{ee}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{bmatrix} e^{\beta 0 T} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\beta(N-1)T} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Der MV-Schätzwert lautet:

$$\hat{U}_0^{\text{MV}} = (\Phi^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y} \quad (1)$$

Der Ausdruck wird stückweise berechnet:

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \Phi &= [e^{-\alpha 0 T} \quad \dots \quad e^{-\alpha(N-1)T}] \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{bmatrix} e^{\beta 0 T} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\beta(N-1)T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\alpha 0 T} \\ \vdots \\ e^{-\alpha(N-1)T} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(2\alpha-\beta)nT} \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \frac{1 - e^{-(2\alpha-\beta)NT}}{1 - e^{-(2\alpha-\beta)T}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{C}_{ee}^{-1} \mathbf{y} &= [e^{-\alpha 0 T} \quad \dots \quad e^{-\alpha(N-1)T}] \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{bmatrix} e^{\beta 0 T} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{\beta(N-1)T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(\alpha-\beta)nT} y(n) \end{aligned} \quad (1)$$

Das Ergebnis lautet somit:

$$\hat{U}_0^{\text{MV}} = \frac{1 - e^{-(2\alpha-\beta)T}}{1 - e^{-(2\alpha-\beta)NT}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(\alpha-\beta)nT} y(n) \quad (1)$$

f) Für  $\beta = 0$  ergibt sich  $\mathbf{C}_{ee} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}$ . Der MV-Schätzer geht dann in den LS-Schätzer über. Der Schätzwert lautet:

$$\hat{U}_0^{\text{LS}} = \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{1 - e^{-2\alpha NT}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha n T} \cdot y(n) \quad (2)$$

## Bayes-Schätzung

- g) Da die Messungen statistisch unabhängig sind, lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $N$  Messungen

$$f(\mathbf{t}|\lambda) = \prod_{n=1}^N f(t_n|\lambda) = \prod_{n=1}^N \lambda \exp(-\lambda t_n). \quad (1)$$

Die Likelihood-Funktion lautet dann

$$\begin{aligned} \ln f(\mathbf{t}|\lambda) &= \sum_{n=1}^N \ln f(t_n|\lambda) = \sum_{n=1}^N \ln(\lambda \exp(-\lambda t_n)) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln \lambda - \lambda \cdot t_n = N \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{n=1}^N t_n. \end{aligned} \quad (3)$$

(4 Punkte)

- h) Für den Maximum-Likelihood-Schätzwert muss gelten:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\mathbf{t}|\lambda) \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1)$$

Daraus folgt:

$$\frac{N}{\lambda} - \sum_{n=1}^N t_n \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{N}{\hat{\lambda}} = \sum_{n=1}^N t_n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{n=1}^N t_n} \quad (1)$$

(3 Punkte)

- i) Der Erwartungswert des Maximum-Likelihood-Schätzwertes lautet:

$$E\{\hat{\lambda}\} = E\left\{ \frac{N}{\sum_{n=1}^N t_n} \right\} = \frac{N}{\sum_{n=1}^N E\{t_n\}} \quad (1)$$

Mit dem Hinweis ergibt sich

$$E\{\hat{\lambda}\} = \frac{N}{N \cdot \frac{1}{\lambda}} = \lambda. \quad (1)$$

Der Schätzer ist erwartungstreu.

(2 Punkte)

- j) Die untere Grenze für die Schätzfehlerkovarianz wird mit der Cramér-Rao-Ungleichung bestimmt. Dafür wird die zweite Ableitung der Likelihood-Funktion benötigt

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln f(\mathbf{t}|\lambda) = \frac{-N}{\lambda}. \quad (1)$$

Die minimale Schätzfehlerkovarianz lautet

$$\sigma_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}} \geq \left( -E_{\mathbf{t}|\lambda} \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{t}|\lambda)}{\partial \lambda^2} \right\} \right)^{-1} \quad (1)$$

$$= \left( -E_{\mathbf{t}|\lambda} \left\{ \frac{-N}{\lambda^2} \right\} \right)^{-1} = \frac{\lambda^2}{N}. \quad (1)$$

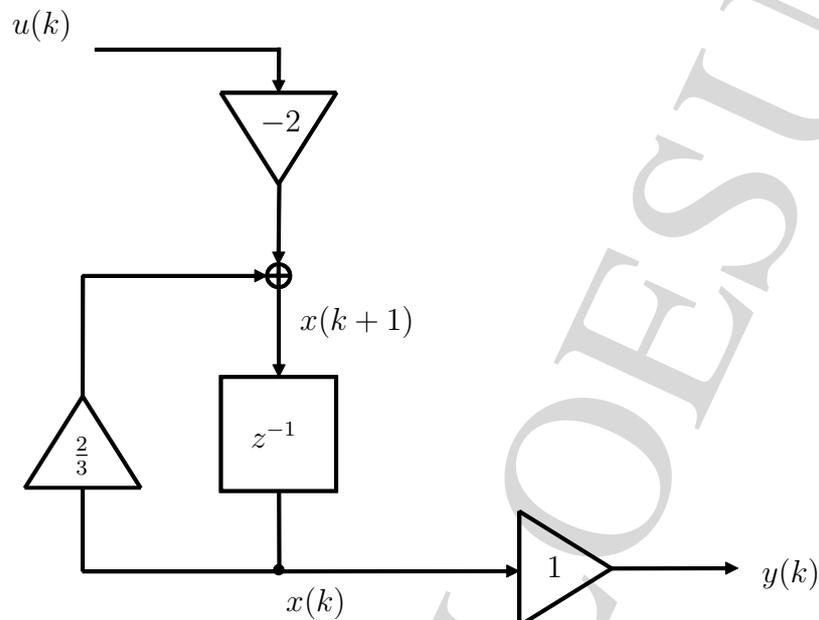
(3 Punkte)

MUSTERLÖSUNG

## Aufgabe 6: Zustandsschätzverfahren (18 Punkte)

- a) Erklären Sie anschaulich, wie sich das Systemrauschen  $v$  und das Messrauschen  $w$  bzw. deren Kovarianzmatrizen  $Q$  und  $R$  auf die Zustandsschätzung mittels eines Kalman-Filters auswirken. (2 Punkte)

Gegeben ist folgendes Blockschaltbild:



- b) Geben Sie die Gleichungen des Zustandsraummodells an. (1 Punkt)
- c) Ist das System stabil? (1 Punkt)

Das System wird von der deterministischen Eingangsgröße  $u(k)$  angeregt. Störungen treten in Form eines Systemrauschens  $v(k)$  und eines Ausgangsrauschens  $w(k)$  auf. Beide Prozesse sind Gauß'sche weiße Rauschprozesse mit den Varianzen

$$E \{v(k)^2\} = Q(k) \quad \text{und} \quad E \{w(k)^2\} = R(k) .$$

Für die Gewichtung des Systemrauschens gilt  $L = 1$ . Im Folgenden soll für dieses System ein Kalman-Filter entworfen werden.

- d) Stellen Sie die Rekursionsgleichungen des Kalman-Filters für das gegebene System auf. Zeichnen Sie das Blockschaltbild von System und Kalman-Filter. Tragen Sie die numerischen Werte des Systems in die entsprechenden Blöcke ein und kennzeichnen Sie, welcher Teil des Blockschaltbildes zum Kalman-Filter gehört. (4 Punkte)
- e) Sie möchten nun eine Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter durchführen. Die Anfangswerte des Zustandes sind unbekannt. Für welche Größen werden Startwerte benötigt? Wie würden Sie bei der Initialisierung vorgehen? (3 Punkte)

Im Folgenden gelte für die Varianzen der Rauschprozesse

$$Q(k) = 1 \quad \text{und} \quad R(k) = 1 .$$

- f) Im Falle eines zeitinvarianten Systems und zeitinvarianter Rauschprozesse konvergiert der Verstärkungsfaktor für  $k \rightarrow \infty$ . Berechnen Sie den stationären Endwert  $K_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} K(k)$ .

**Hinweis:** Stellen Sie zunächst eine Rekursionsgleichung der Form  $\hat{P}(k+1) = f(\hat{P}(k))$  auf. Der Grenzwert  $\hat{P}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{P}(k)$  erfüllt die Gleichung  $\hat{P}_\infty = f(\hat{P}_\infty)$ .

(7 Punkte)

MUSTERLÖSUNG

## Lösung

- a) Durch die beiden Rauschprozesse werden die Kovarianzen im Prädiktions- und Filterschritt und damit die Kalman-Verstärkung  $\mathbf{K}$  angepasst. Bei einem hohen Systemrauschen (=ungenaueres Modell) verlässt sich das Kalman-Filter stärker auf die Messungen und umgekehrt. (2 Punkte)

- b) Die Systemgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \frac{2}{3}x(k) - 2u(k) \\y(k) &= x(k)\end{aligned}$$

(1 Punkt)

- c) Der einzige Systempol liegt bei  $z = \frac{2}{3}$  und damit innerhalb des Einheitskreises. Daher ist das System stabil. (1 Punkt)

- d) Die Rekursionsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}x^*(k+1) &= A \cdot \hat{x}(k) + B \cdot u(k) \\&= \frac{2}{3} \cdot \hat{x}(k) - 2 \cdot u(k)\end{aligned}\tag{0,5}$$

$$\begin{aligned}P^*(k+1) &= A^2 \cdot \hat{P}(k) + L^2 \cdot Q(k) \\&= \frac{4}{9} \hat{P}(k) + Q(k)\end{aligned}\tag{0,5}$$

$$\hat{x}(k+1) = x^*(k+1) + K(k+1) \cdot (y(k+1) - x^*(k+1))\tag{0,5}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}(k+1) &= (1 - K(k+1))^2 \cdot P^*(k+1) + K^2(k+1) \\&= (1 - K(k+1)) \cdot P^*(k+1)\end{aligned}\tag{0,5}$$

$$K(k+1) = \frac{P^*(k+1)}{P^*(k+1) + R(k+1)}\tag{1}$$

Das Blockschaltbild des Systems mit Kalman-Filter ist in Bild 19 dargestellt. (2) (4 Punkte)

- e) Es werden Startwerte für den Filterschätzwert  $\hat{x}(0)$  und für die Filterkovarianz  $\hat{P}(0)$  benötigt (1). Wenn man keine Informationen zur Verfügung hat, kann der Anfangszustand zu  $\hat{x}(0) = 0$  gewählt werden. Für den Initialwert der Filterkovarianz ist die Wahl eines großen Wertes z.B.  $\hat{P}(0) = 10^6$  sinnvoll, um die Anfangsunsicherheit zu berücksichtigen (2). (3 Punkte)
- f) Zunächst wird die Gleichung für  $K(k+1)$  in  $\hat{P}(k+1)$  eingesetzt

$$\hat{P}(k+1) = \left(1 - \frac{P^*(k+1)}{P^*(k+1) + 1}\right) P^*(k+1) = \frac{P^*(k+1)}{P^*(k+1) + 1}.\tag{1}$$

Setzt man nun  $P^*(k+1)$  ein, ergibt sich

$$\hat{P}(k+1) = \frac{4\hat{P}(k) + 9}{4\hat{P}(k) + 18}.\tag{1}$$

Der stationäre Endwert  $\hat{P}_\infty$  erfüllt die Gleichung

$$\hat{P}_\infty = \frac{4\hat{P}_\infty + 9}{4\hat{P}_\infty + 18}.\tag{1}$$

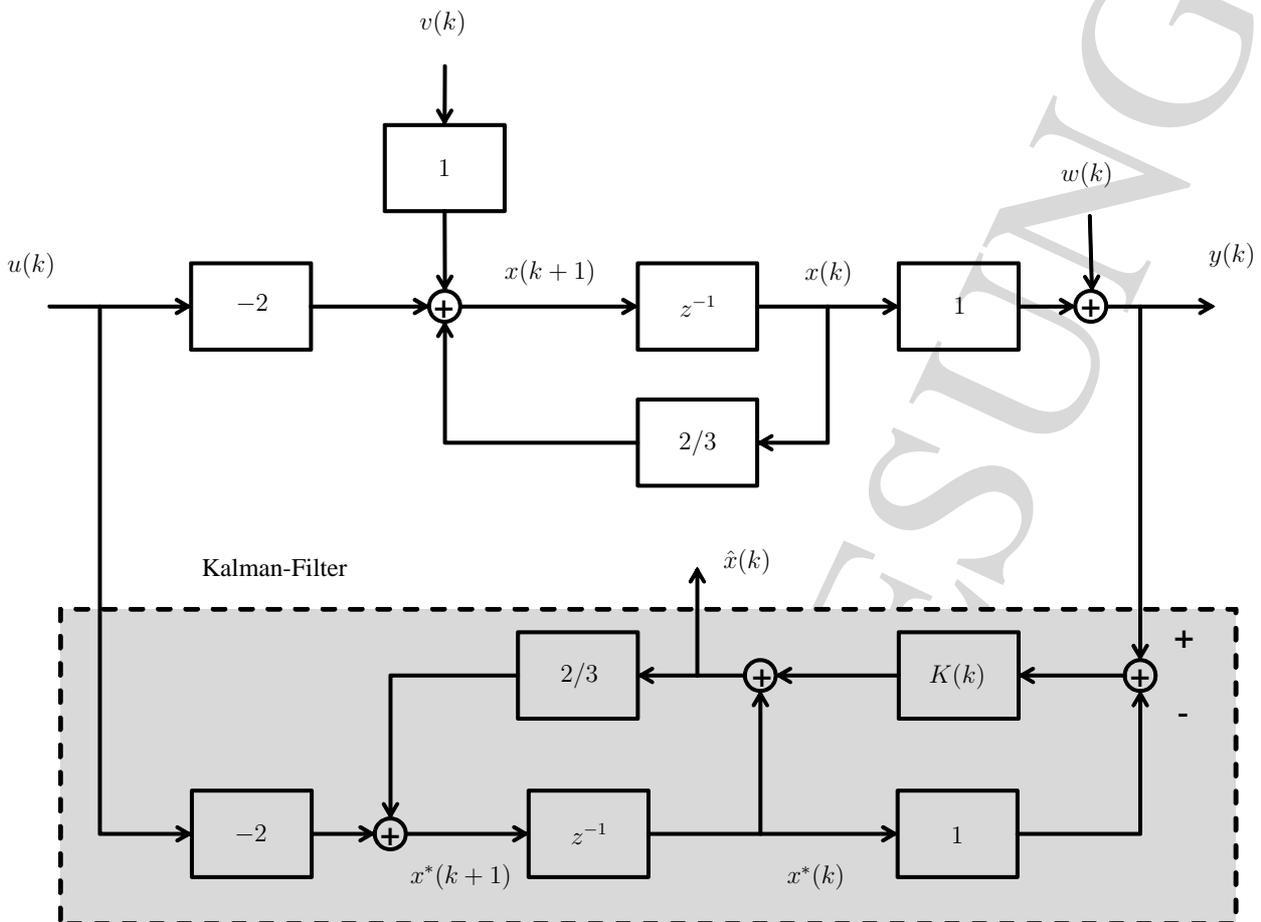


Bild 19: Blockschaltbild des Systems mit Kalman-Filter

Dies ergibt die quadratische Gleichung

$$4 \left( \hat{P}_\infty^2 + \frac{7}{2} \hat{P}_\infty - \frac{9}{4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{P}_{\infty 1,2} = -\frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{85}}{4} . \quad (1)$$

Da  $\hat{P}_\infty > 0$  sein muss, gilt

$$\hat{P}_\infty = -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{85}}{4} \approx 0,555 . \quad (1)$$

Daraus folgt

$$P_\infty^* = \frac{4}{9} \hat{P}_\infty + 1 = \frac{\sqrt{85} + 2}{9} \approx 1,247 . \quad (1)$$

Der Verstärkungsfaktor konvergiert schließlich zu

$$K_\infty = \frac{P_\infty^*}{P_\infty^* + 1} = \frac{\sqrt{85} + 2}{\sqrt{85} + 11} \approx 0,555 . \quad (1)$$

(7 Punkte)